VỀ BÀI TOÁN BÁNH XE CHUYỂN ĐỘNG

Phan Đức Châu

Bài toán:

Cho một đường tròn cố định và một bánh xe (hình tròn) chuyển động không trượt ở phía trong (hoặc phía ngoài) đường tròn. Tìm quỹ tích điểm M gắn trên bánh xe.

Bài giải:

Gọi đường tròn cố định bán kính R được đặt trong hệ trục vuông góc xOy, tâm đường tròn là gốc O. Trên bánh xe bán kính r, ta gắn một hệ trục x'O'y', tâm bánh xe là O'. Điểm M cách O' một khoảng d. Khi bánh xe lăn trên đường tròn, tia OO'quay một góc φ (theo chiều dương chẳng hạn), thì bánh xe quay một góc θ (theo chiều âm). Hệ trục x'O'y' chuyển động sao cho các trục tương ứng luôn luôn song song nhau.

Điểm M tham gia 2 chuyển động: quay tròn xung quanh tâm O' với bán kinh d đi một góc θ, và tâm O'quay tròn xung quanh tâm O một góc φ.

1. Trường hợp bánh xe chuyển động trong đường tròn

Như vậy r < R

Trong hệ x'O'y' tọa độ của điểm M là $(x'_M, y'_M) = (d.\cos(-\theta), d.\sin(-\theta))$.

Trong hệ xOy tọa độ của O' là $(x_{O'}, y_{O'}) = ((R-r).\cos\varphi, (R-r).\sin\varphi)$

Vây: trong hệ trục xOy tọa độ của điểm M: $x_M = x_{O'} + x'_M$; $y_M = y_{O'} + y'_M$

Ta cần tìm quan hệ giữa θ và φ. Khi tia OO' quay một góc φ, thì bánh xe đã lăn trên đường tròn một khoảng R. φ và bánh xe chuyển được r.θ. Hai độ dài này bằng nhau do bánh xe lăn không trượt.

Sử dụng MAPLE để vẽ quỹ tích điểm M.

Ta chọn R = 4, r = 2,3 và d = 1,4.

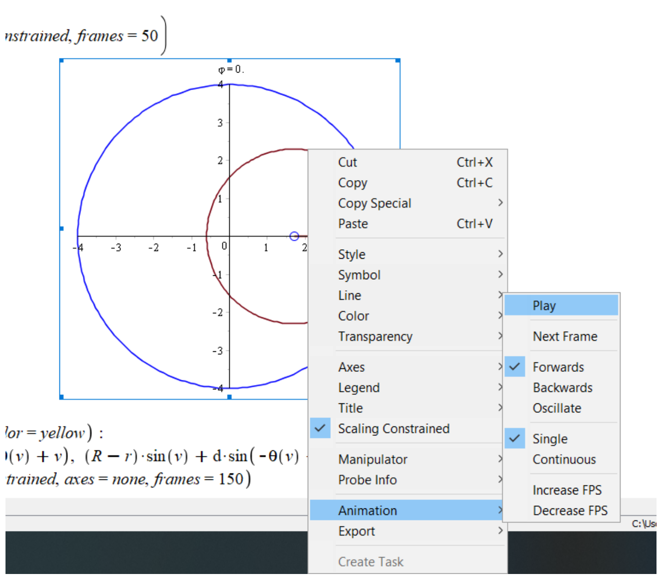
```
> restart : with(plots) : with(plottools) :
R := 4 : r := 2.3 :
"TRUONG HOP BÁNH XE NHO CHUYÊN ĐÔNG LĂN PHÍA
   TRONG DUONG TRON LON CÔ ĐINH"
nen1 := plot([R·cos(u), R·sin(u), u = 0 ..2·π], color = blue) :
θ := α → R·α/r :
d := 1.4 : Môt điêm M trên bánh xe nho cách tâm bánh_xe_nho'= d;
if d < r then d1 := r else d1 := d end if:
```

>

$$G := \mathbf{proc}(t)\ plots[display]\Big(\ plot\big(\big[\,(R-r)\cdot\cos(t) + r\cdot\cos(a),\ (R-r)\cdot\sin(t) + \mathrm{r}\cdot\sin(a),\ a = 0\,..2\cdot\pi\big]\big), plot\big(\big[\ (R-r)\cdot\cos(v) + \mathrm{d}\cdot\cos(-\theta(v)+v),\ \ (R-r)\cdot\sin(v) + \mathrm{d}\cdot\sin(-\theta(v)+v),\ v = 0\,..t\big], color = red\big),\ plottools[line]\big(\big[\ (R-r)\cdot\cos(t),\ (R-r)\cdot\sin(t)\ \big], \big[\ \ (R-r)\cdot\cos(t) + d1\cdot\cos(-\theta(t)+t),\ (R-r)\cdot\sin(t) + d1\cdot\sin(-\theta(t)+t)\big], color = black\big)\ , point\big(\big[R\cdot\cos(t), R\cdot\sin(t)\,\big], color = blue, symbol = circle, symbolsize = 20\big)\ ,\ \ point\big(\big[\,(R-r)\cdot\cos(t) + \mathrm{r}\cdot\cos(-\theta(t)+t),\ (R-r)\cdot\sin(t) + \mathrm{r}\cdot\sin(-\theta(t)+t)\big], color = brown, symbol = circle, symbolsize = 20\big), point\big([R, 0], color = blue, symbol = circle, symbolsize = 20\big), point\big(\big[\,(R-r)\cdot\cos(t) + \mathrm{d}\cdot\cos(-\theta(t)+t),\ \ (R-r)\cdot\sin(t) + \mathrm{d}\cdot\sin(-\theta(t)+t)\big], color = red, symbol = circle, symbolsize = 15\big), plot\big([R\cdot\cos(u), R\cdot\sin(u), u = 0\,..t], color = \mathrm{blue}, \mathrm{thickness} = 3\big),\ \ \mathrm{plot}\big(\big[\,(\mathrm{R}-\mathrm{r})\cdot\cos(\mathrm{t}) + \mathrm{r}\cdot\cos(\mathrm{u}),\ (\mathrm{R}-\mathrm{r})\cdot\sin(\mathrm{t}) + \mathrm{r}\cdot\sin(\mathrm{u}),\ \mathrm{u} = -\theta(\mathrm{t}) + \mathrm{t}\,..\mathrm{t}\big], \mathrm{color} = \mathrm{brown}, \mathrm{thickness} = 3\big)\ ,\ plottools[line]\big([R\cdot\cos(t), R\cdot\sin(t)\,], [\,(R-r)\cdot\cos(t), (R-r)\cdot\sin(t)\,], color = red\big)\ , point\big(\big[\,(R-r)\cdot\cos(t), (R-r)\sin(t)\,\big], color = blue, symbol = circle, symbolsize = 20\big)\ \Big) : \mathbf{end\ proc}:$$

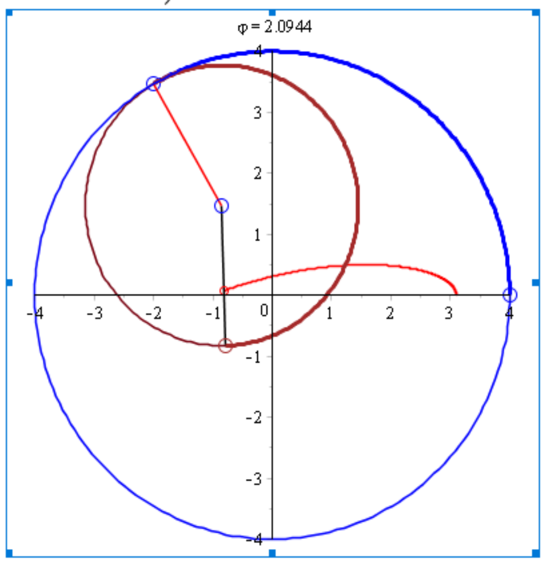
$$animate\left(G, [\varphi], \varphi = 0\,..\,\frac{2\cdot\pi}{3}, background = nen1, scaling = constrained, frames = 50\right)$$

Lệnh cuối mô tả điểm M đã chuyển động như thế nào.
Chú ý khi nhấn Enter vào lênh animate(…….) ta có hình sau.
Khi đó nháy vào hình, chọn Animation > Play, rồi nhấn chuột trái



Kết quả cho hình ảnh sau

$constrained, frames = 50\Big)$



Gõ tiếp lệnh:

> **if** $d \le r$ **then** $m := R + 0.5$ **else** $m := R + d - r + 0.5$ **end if**:
$nen2 := plot\big(\left[m\cdot\cos(u), m\cdot\sin(u), u = 0..2\cdot\pi\right], filled = true, color = yellow\big)$:

$H :=$**proc**(t) $plots[display]\Big(plot\Big(\big[(R-r)\cdot\cos(v) + \mathrm{d}\cdot\cos(-\theta(v) + v), (R-r)\cdot\sin(v) + \mathrm{d}\cdot\sin(-\theta(v) + v), v = 0..t\big], color = red\Big)\Big)$: **end proc**:

> $animate\big(H, [\varphi], \varphi = 0..50\cdot\pi, background = nen2, scaling = constrained, axes = none, frames = 150\big)$

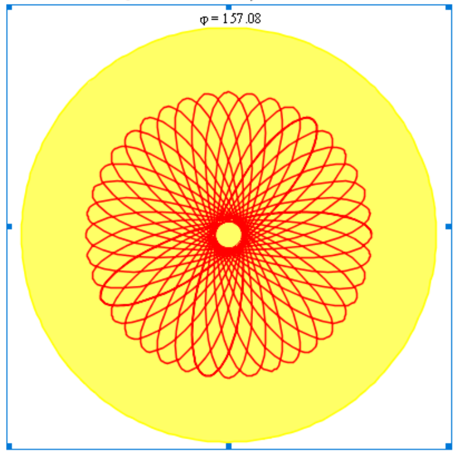
Với lệnh animate(….) thực hiện như trên ta có quỹ tích của điểm M.
Thực ra để có hình vẽ dưới ta không cần đến 2 lệnh

G := proc(t)……………………..

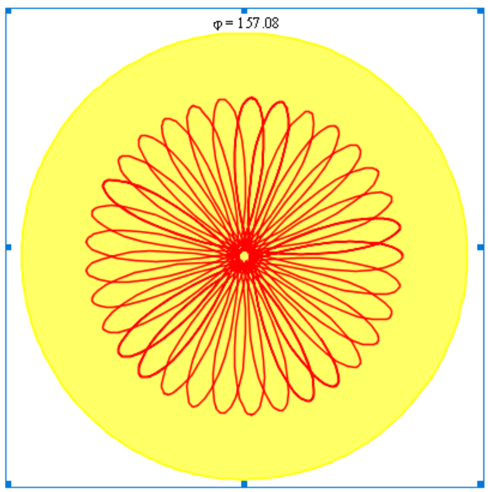
animate(G,[φ],……………………..

Cho nên ta có thể bỏ qua không nhấn 2 lệnh này
Khi thay đổi R, r, d, ta có các quỹ tích rất đẹp mắt khác nhau. Có thể chọn d > r.

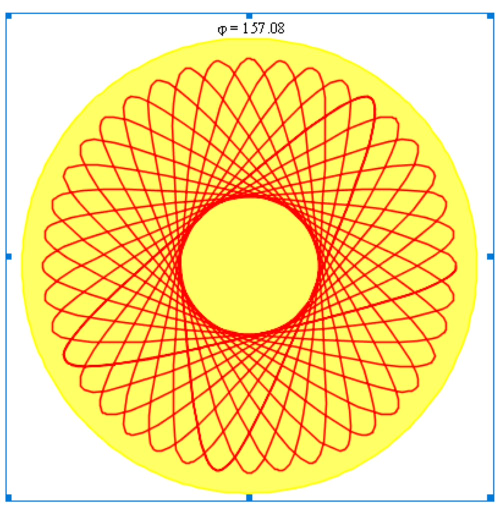
Các nhà sản xuất đồ chơi đã tạo ra một thước vẽ. Một tấm nhựa có đục một hình tròn lớn, kèm theo một số bánh xe bán kính khác nhau bằng nhựa. Để bánh xe lăn phía trong đường tròn lớn không trượt, các bánh xe có răng cưa, ăn khớp với răng cưa trên đường tròn. Trên bánh xe đục nhiều lỗ nhỏ khác nhau (vị trí điểm M). Dùng một bút bi đặt vào các lỗ đó, xoay sao cho bánh xe lăn trên đường tròn. Khi đó bút bi sẽ vạch trên giấy quỹ tích điểm M. Phối hợp mầu ta có nhiều hình vẽ lý thú.



R=4, r =2.3, d=1.4.



R=3.34, r =2, d=1.4.



R=4, r =2.3, d=3.4

2. Trường hợp bánh xe chuyển động ngoài đường tròn

Như vậy không bắt buộc r < R. Giá trị r có thể tùy ý.

Lý luận như trên, lưu ý chỉ khác một chút:

Trong hệ x'O'y' tọa độ của điểm M là $(x'_M, y'_M) = (d.\cos\theta, d.\sin\theta)$.

Trong hệ xOy tọa độ của O' là $(x_{O'}, y_{O'}) = ((R+r).\cos\varphi, (R+r).\sin\varphi$

Ta chọn R=3.3 , r=2 , d=2.4.

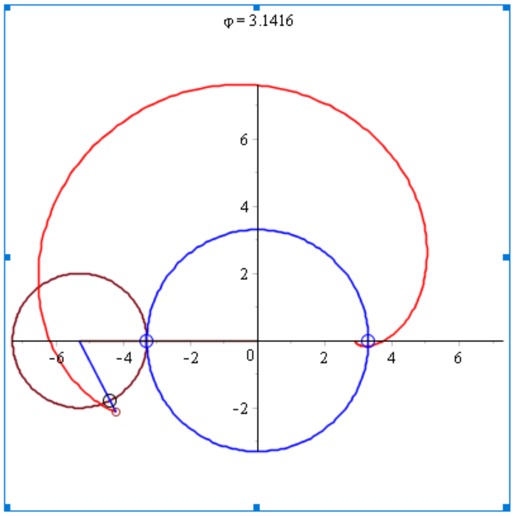
```
> restart : with(plots) : with(plottools) : R := 3.3 : r := 2 :

"TRƯƠNG HƠP BÁNH XE CHUYÊN ĐÔNG LĂN PHÍA NGOÀI
   DUONG TRON CÔ ĐINH";
nen1 := plot([R· cos(a), R· sin(a), a = 0 ..2·π], color = blue) :
d := 2.4 :
   'Môt điêm M trên bánh xe chuyên đông cách tâm bánh_xe chuyen
   đong'= d : θ := α→ R·α/r :

G :=proc(t) plots[display]( plot([ (R + r)·cos(t) + r·cos(a), (R
    + r)·sin(t) + r·sin(a), a = 0 ..2·π]), plot([ (R + r)·cos(v) - d
   ·cos(θ(v) + v), (R + r)·sin(v) - d·sin(θ(v) + v), v = 0 ..t],
   color = red), plottools[line]([ (R + r)·cos(t), (R + r)
   ·sin(t) ], [ (R + r)·cos(t) - d·cos(θ(t) + t), (R + r)·sin(t)
   - d·sin(θ(t) + t)], color = blue) , plottools[line]([0, 0], [(R
    + r)·cos(t), (R + r)·sin(t)], color = brown), point([R, 0],
   color = blue, symbol = circle, symbolsize = 20), point([R·cos(t),
   R·sin(t)], color = blue, symbol = circle, symbolsize = 20),
   point([ (R + r)·cos(t) - d·cos(θ(t) + t), (R + r)·sin(t) - d
   ·sin(θ(t) + t)], color = brown, symbol = circle, symbolsize = 15)
    , point([(R + r)·cos(t) - r·cos(θ(t) + t), (R + r)·sin(t) - r
   ·sin(θ(t) + t)], color = black, symbol = circle, symbolsize = 20)
    ) : end proc:

> animate(G, [φ], φ = 0 .. π, frames = 50, scaling = constrained,
      background = nen1);
```

Thao tác như trên , hai lệnh cuối cho ta phân tích sự chuyển động của M.
(Ta có thể bỏ qua 2 lệnh này nếu chỉ mong muốn có kết quả cuối cùng).



Hai lệnh cuối cho quỹ tích M

> **if** $d \le r$ **then** $m := R + 2\cdot r + 0.5$ **else** $m := R + r + d + 0.5$ **end if**:
> $nen2 := plot([\mathrm{m}\cdot\cos(u), \mathrm{m}\cdot\sin(u), u = 0\,..2\cdot\pi], filled = true, color = yellow)$:

$H :=$ **proc**(t) $plots[display](plot([\ (\mathrm{R}+\mathrm{r})\cdot\cos(v) - \mathrm{d}\cdot\cos(\theta(v) + v),\ (\mathrm{R}+\mathrm{r})\cdot\sin(v) - \mathrm{d}\cdot\sin(\theta(v) + v), v = 0\,..t], color = red))$
:**end proc**:

> $animate(H, [\varphi], \varphi = 0\,..40\cdot\pi, background = nen2, scaling = constrained, axes = none, frames = 150)$