Vài nét Toán học trong Âm nhạc

Phạm Đăng Long

Có nhiều nhà toán học yêu âm nhạc đã nghiên cứu vận dụng toán học vào Âm nhạc như các giáo sư Nguyễn Thúc Hào, Nguyễn Xiển, Hoàng Xuân Hãn, Tạ Quang Bửu, Đàm Thanh Sơn...
Bài này nêu lên vài nét Toán học trong Nhạc lý cơ bản.

Nội dung của bài báo:

- Một số khái niệm cơ bản trong Âm nhạc
- Dãy số zig-zag
- Quy luật chuyển đổi liên quan đến các dấu thăng/giáng
- Áp dụng toán học để xây dựng hợp âm.

1. Một số khái niệm cơ bản trong Âm nhạc

a) – Âm thanh.

Về phương diện vật lý, **âm thanh** là sóng đàn hồi lan truyền trong không khí với một tần số nào đó. Đơn vị đo tần số là Hetz (Hz) là số chu kỳ dao động trong một giây. Tần số càng lớn thì âm càng cao (treble). Tần số bé thì âm thấp (bass).
Âm thanh được mã hóa nhờ cao độ (tức là tần số của sóng âm đo bằng Hz) và trường độ (ms).
Âm thanh tai người có thể nghe được có tần số khoảng từ 16 Hz đến 22.000 Hz. Âm thanh 16 Hz gọi là **hạ âm**, cao hơn 22.000 Hz gọi là **siêu âm**. Một số loài động vật nghe dược hạ âm. Một số loài nghe được siêu âm, thậm chí phát ra được siêu âm.
Âm của nốt nhạc đầu tiên phía trái đàn piano có tần số 27 Hz nghe rất rõ nhưng cũng ít khi dùng.
Âm 44 Hz là kỷ lục âm trầm nhất của ca sĩ giọng nam Caxpa Fexe hát ở thế kỷ 18.
Người ta dùng máy phát siêu âm trong các việc khác như khoan đá, thăm dò đáy biển hoặc chụp ảnh các bộ phận trong y học, kiểm tra chất lượng hàng hóa.
Để **mã hóa âm thanh** người ta sẽ dùng cặp số (Tần số;Thời gian) và một âm thanh phức tạp thì là chuỗi các âm thanh đơn gian!
Ta quy ước là các nốt nhạc nói tới đều nghe được!

b) Đặc tính quan trọng của âm thanh

Hai âm thanh mà tần số của tần số thông ước với nhau cũng hợp nhau hơn nghe êm tai.
Người ta lý giải điều này nhờ việc so sánh đồ thị các sóng âm.
Áp dụng điều này để xây dựng các hợp âm trong âm nhạc.
Hai dây đàn có độ căng như nhau thì khi gẩy lên sinh ra tần số tỉ lệ nghịch với độ dài của chúng.

c) Thang nhạc

Do đặc tính của âm thanh, người ta xây dựng lớp các âm thanh gần giống nhau.
Trước hết xét hai âm thanh có tần số tỉ lệ 1:2 hay 2:1.
Gọi F_0 là âm thanh nghe được thì **lớp âm thanh** đó gần giống có tần số $2^n \times F_0$.
Ban đầu, người ta lấy luôn âm thanh có tần số $F_0 = 16$ Hz, tức là 2^4 Hz, và lấy lớp âm thanh tần số 2^n $(4 \le n \le 14)$ làm mốc để xây dựng thang nhạc.
Mặc dù con số 2^n đẹp mắt, nhưng trong thực tế F_0 hơi khác một chút. Ta sẽ tính F_0 ở phần sau.
Thang nhạc là dãy âm thanh cơ bản gọi là nốt, có tên cụ thể để sử dụng trong Âm nhạc.
Thang nhạc hiện nay có hai loại: **Thang thất âm** (7 nốt) và **Thang ngũ âm** (5 nốt).
Nhạc dân tộc Việt Nam thường sử ụng thang ngũ âm.

d) Hàm tần số của các nốt nhạc trong thang thất âm

Người ta lấy vần đầu của bảy từ của một bài thánh ca để đặt tên cho các nốt nhạc:
Do, Re, Mi, Fa, Sol, La và **Xi** và kí hiệu tương tự là **C, D, E, F, G, A** và **B** tương ứng.
Ở mức cao hơn lại lặp lại nhưng tần số gấp đôi, cứ như thế mãi. Đồng thời dùng các chỉ số dưới các kí hiệu một cách tăng dần:

$\mathbf{C_0, D_0, E_0, F_0, G_0, A_0, B_0, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, A_1, B_1, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, A_2, B_2, \ldots, C_n, \ldots}$

Chỉ số 0 có thể bỏ đi cho gọn!
Tập hợp các nốt cùng tên khác tạo thành **lớp đồng phôi**, chẳng hạn lớp đồng phôi của C là gồm tất cả các nốt C_i, $\forall i \geq 0$.
Nhờ tiếng Việt có dấu nên để dễ phân biệt ta đọc thứ tự là:
Đồ, Rề, Mì, Fà, Sòl, Là, Xì, Đô, Rê, Mi, Fa, Sol, La, Xi, Đố, Rế, Mí, Fá, Sól, Lá, Xí, Đỗ, …
Mỗi nốt sẽ có một tần số xác định!
Trước hết, gọi F(nốt) là tần số của nốt ở trong ngoặc, tức là một hàm theo nốt nhạc. Khi đó:

$F(C_0) = F_0$, $F(C_1) = 2F_0$, …, $F(C_i) = 2^i F_0$, …

$F(C_{i+1}) = 2F(C_i)$, $\forall i \geq 0$).

Ta sẽ xây dựng hàm số này trong thang thất âm này!
Để đạt được mục tiêu: với mọi nốt X_i, ($X \in \{C, D, E, F, G, A, B\}$) đều thỏa mãn điều kiện:

$F(X_{i+1}) = 2F(X_i)$, thì $F(X_i) = ?$

Trong khoảng từ C_i đến C_{i+1} ($\forall i \geq 0$), ta lấy các mốc chia tạo thành 12 nửa cung sao cho:
Từ một mốc chia k đến mốc k + 12 sẽ ứng tần số sẽ gấp đôi.

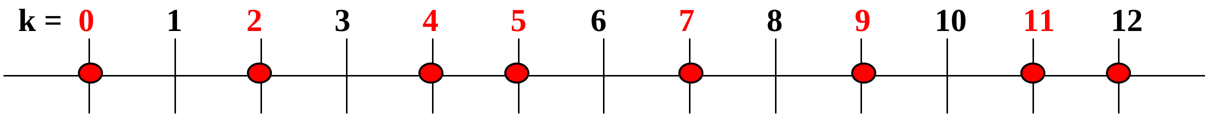
Gọi F(k) là tần số ở mốc $k \geq 0$, ta có phương trình hàm tìm F(k) biết rằng

$\mathbf{F(0) = F_0}$,

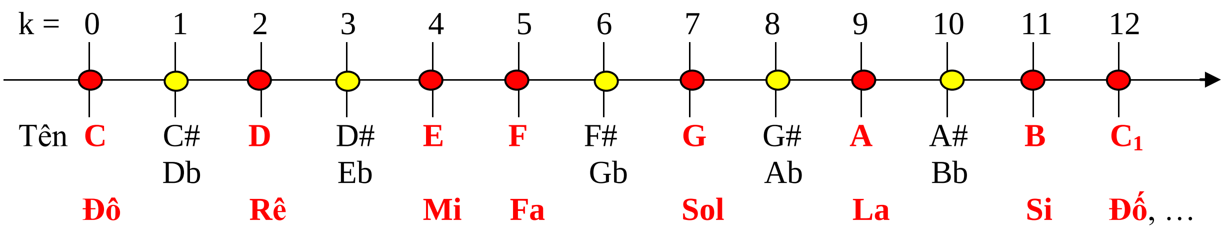
$\mathbf{F(k + 12) = 2F(k)}$, $(\forall k \geq 0)$.

Giải ra ta được

$\mathbf{F(k) = F_0} \times \sqrt[12]{\mathbf{2^k}}$ hay $\mathbf{F(k) = F_0} \times \mathbf{2^{k/12}}$, $(\forall k \geq 0)$.

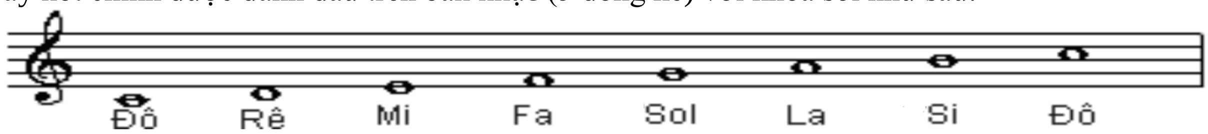


Người ta lấy các nốt ở mốc 0, 2, 4, 5, 7, 9 và 11 là bảy nốt chính của thang thất âm.
Bảy nốt này đại diện cho các lớp đồng phôi chứa nó.
Như vậy ta đã **mã hóa nốt nhạc bằng con số mốc** của nó trên thang chia nửa cung!
Dễ thấy hai nốt k_i và k_j cùng lớp đồng phôi khi $k_i = k_j \pmod{12}$, với $i, j \in \mathbb{N}$.
Còn ở các mốc khác thì sẽ là nốt chính có dấu thăng (#) hay dấu giáng (b).
Từ đây, máy tính sẽ tính tần số của nốt ở mốc bất kỳ!



Hàm tần số của nốt k kí hiệu là F(k) có giá trị bằng : $\mathbf{F(k) = F_0 \times 2^{k/12}}$.
Tùy theo k mà nốt có thể có dấu # hay b, nhưng luôn có quy luật :
Tần số các nốt k trong lập thành một cấp số nhân với công bội là $2^{1/12} \approx 1.059463094...$
Một bài hát nếu muốn hát cao lên (hay thấp đi) cứ m nửa cung thì tần số mọi nốt sẽ đồng loạt tăng (hay giảm di) lên $2^{m/12}$ lần, tương ứng.

Bảy nốt chính được đánh dấu trên bản nhạc (5 dòng kẻ) với khóa sol như sau:



Quy định :
Hai nốt cùng dòng gọi là ở quãng 1 (đồng âm), lên/xuống 1 vị trí cách nhau một quãng 2, …

Hai nốt X_i và X_{i+1} ($X \in$ {C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, Db, Eb, Gb, Ab, Bb}) có vị trí tương đối là một quãng 8 (Octave).
Hai nốt cách nhau một quảng 8 thì cùng tên (kể cả # hay b) thì cùng lớp đồng phôi và chỉ khác độ trầm bổng, nhưng nghe gần giống nhau.

Ví dụ :
Kể từ nốt Đô với nốt tiếp theo ở các quãng 1, 2, 3, …, 8.

Quy định :
Nốt La (A_8) của octave từ C_8 đến C_9 có tần số là 440 Hz.

Để ý là C_i mã có bằng 12i, nên $C_8 = 96$ và $A_8 = 105$.
Từ đây ta có thể tính được chính xác

$$\mathbf{F_0 = 440} \times \mathbf{2^{-105/12}}$$

Kết luận :
Hàm tần số theo nốt k bất kỳ ($k \geq 0$) là :

$$\mathbf{F(k) = 440} \times \mathbf{2^{(k-105)/12}}$$

e) Âm giai, Âm thức và Gam

Âm giai là một dãy các nốt sắp xếp liên tiếp với nhau từng bậc, hình thành trong một quãng 8. Bản nhạc soạn theo một âm giai nào đó thì thường mở đầu/ kết thúc bằng nốt chính của âm giai, tức là một nốt thuộc lớp đồng phôi của nốt đầu/cuối âm giai.

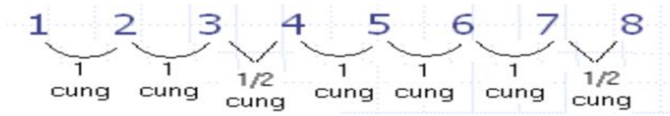
Âm thức là cấu trúc sắp xếp về cao độ (thường tính bằng cung hay nửa cung) giữa các nốt với nhau trong âm giai bắt đầu từ nốt đầu tiên đến nốt cuối của âm giai đó. Một nốt trong âm giai với âm thức nào đó có thể được xuất hiện không chỉ một lần.
Mỗi âm giai lại có hai Âm thức : Trưởng (Dur) và Thứ (Moll).
Âm thức trưởng thường dùng cho bản nhạc có tính chất mạnh mẽ.
Trái lại, âm thức thứ thường cho bản nhạc mềm mại êm dịu.

Gam là âm giai kết hợp với âm thức nhất định**.**

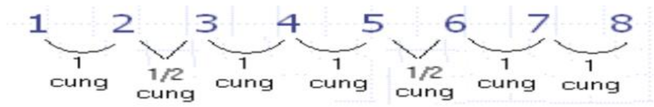
Kí pháp:
Gam X trưởng thường được kí hiệu là X-dur. Gam X thứ được kí hiệu là X-moll. Ở đây, X có thể là bất cứ nốt nào trong {C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, Db, Eb, Gb, Ab, Bb}.

f) Công thức Gam trưởng/thứ

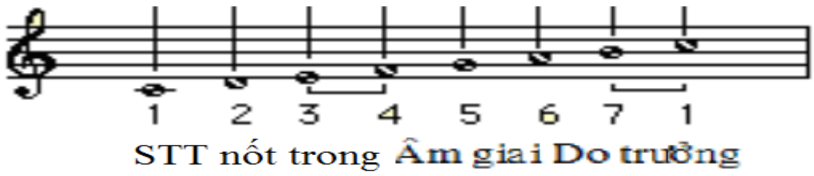
Gam trưởng :



Gam thứ :



<u>Ví dụ1 :</u>
Gam Đô trưởng (C-dur), không có thăng/giáng, là âm giai tự nhiên :

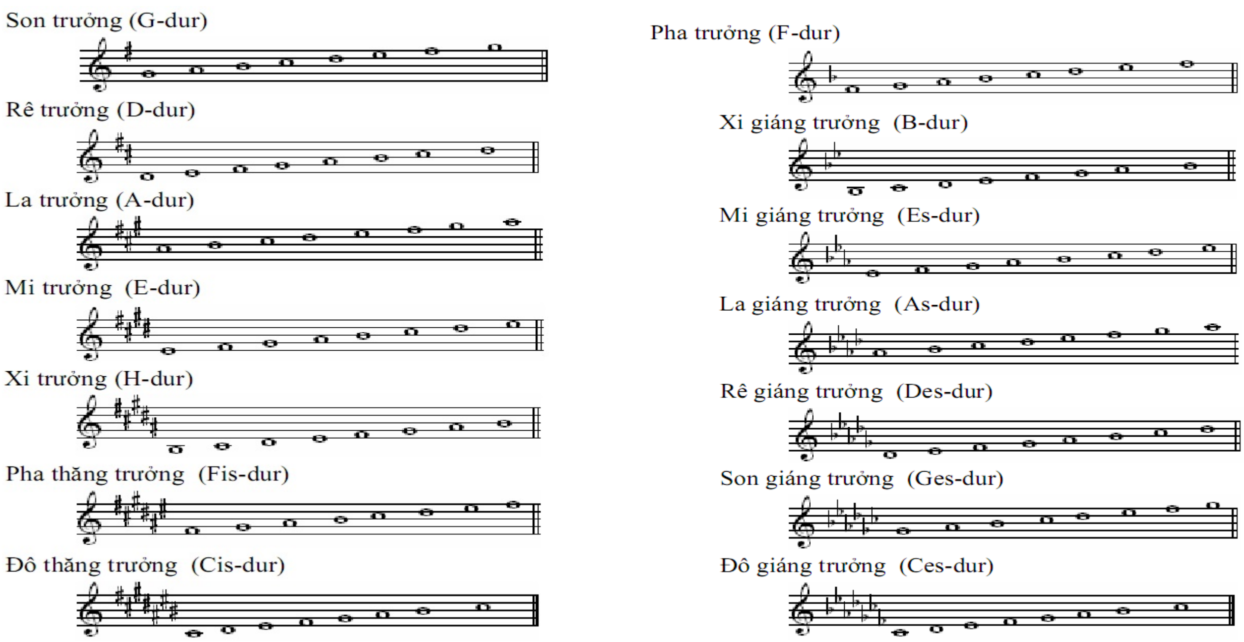


<u>Ví dụ 2 :</u>
Gam La thứ (a-moll) đi từ nốt trong quãng 8 La đến La.

<u>Nhận xét :</u>
Khi không có dấu hóa mà ta lấy âm giai trưởng lùi đi 3 nửa cung thì được một âm giai thứ, và lấy âm giai thứ tiến lên 3 nửa cung thì lại được âm giai trưởng !

<u>Ví dụ 2 :</u>
Thiết lập âm gam Rê trưởng hay D-dur :
Nếu không #/b gì thì từ D dần lên đến D, âm thức sẽ là 1, ½, 1, 1, 1, ½,1 không hợp thức nào.
Muốn nó trở thành gam trưởng thì phải thăng F và C lên và được
Gam D trưởng : D - E - F# - G - A - B - C# - D.
Gam Xi thứ : B - C# - D - E - F# - G - A - B.

Người ta thiết lập được các gam trưởng/thứ cho từ bất kỳ nốt nào.



2. Cấp số zig-zag

a. Định nghĩa:

Dãy số thực (a_i), $i \in N_+$ được gọi là cấp số zig-zag khi và chỉ khi tồn tại hai số thực α và β sao cho: $a_{i+1} - a_i = \alpha$ nếu i lẻ và $a_{i+1} - a_i = \beta$ nếu i chẵn.
Cặp $(\alpha;\beta)$ gọi là cặp công sai của cấp số zig-zag.

Ví dụ:
Cấp số cộng công sai d là trường hợp riêng của cấp số zig-zag với cặp công sai (d;d).
Dãy số 1, -2, 2, -1, 3, … tạo thành cấp số zig-zag với cặp công sai là (-3;4).
Dãy đan dấu a, -a, a, -a, a, … tạo thành cấp số zig-zag với cặp công sai ((-2a;2a).

b. Số hạng tổng quát của cấp số zig-zag

Mệnh đề 1:
Cho một cấp số zig-zag với cặp công sai $(\alpha;\beta)$ thì số hạng tổng quát là

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1).\frac{\alpha + \beta}{2} + (1 + (-1)^n).\frac{\alpha - \beta}{4}}$$

Chứng minh:
Dễ thấy là $\forall$ cặp số $(\alpha;\beta)$, ta luôn có : $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ và $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$.
Theo định nghĩa của cấp số zig-zag ta lần lượt có :

$a_1 = a_1 \qquad = a_1$

$a_2 = a_1 + \alpha \qquad = a_1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$

$a_3 = a_1 + \beta \qquad = a_2 + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$

$a_4 = a_3 + \alpha \qquad = a_3 + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$

$a_5 = a_4 + \beta \qquad = a_4 + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$

….

$a_{2k} = a_{2k-1} + \alpha = a_{2k-1} + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$

$a_{2k+1} = a_{2k} + \beta = a_{2k} + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$

Nếu n chẵn, n = 2k, ta cộng 2k đẳng thức vế trái với nhau, phải với nhau, ước lược các số hạng giống nhau, ta được

$a_n = a_{2k} = a_1 + (n-1)\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = a_1 + (n-1)\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = a_1 + (n-1).\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$

Nếu n chẵn, n = 2k + 1, ta cộng 2k + 1 đẳng thức vế trái với nhau, phải với nhau, ước lược các số hạng giống nhau, ta được

$a_n = a_{2k+1} = a_1 + (n-1)\frac{\alpha+\beta}{2}$

Hai trường hợp này chỉ khác nhau một số bằng $\frac{\alpha-\beta}{2}$, nên ta có thể viết gộp lại thành:

$$a_n = a_1 + (n-1).\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{4} + (-1)^n . \frac{\alpha-\beta}{4} = a_1 + (n-1).\frac{\alpha+\beta}{2} + (1 + (-1)^n). \frac{\alpha-\beta}{4}, \text{ đpcm!}$$

Chú ý :
Công thức này cũng đúng khi áp dụng vào cấp số cộng hay dãy số đan dấu với giá trị tuyệt đối không đổi.

Mệnh đề 2:
Một cấp số zig-zag với cặp công sai $(\alpha;\beta)$ $(\alpha \neq \beta)$ mà mỗi số hạng nó đồng dư với chính nó theo mod bằng $|\alpha - \beta|$ thì có thể biểu diễn (hình thức) như một cấp số cấp số cộng.

Chứng minh:
Ta xét trường hợp $\alpha \leq \beta$ khi đó mỗi số hạng nó đồng dư với chính nó theo mod bằng $\beta - \alpha$. Các trường hợp khác thì tương tự.

Cách 1:
Ta sẽ chứng minh $a_n = (a_1 - \beta) + n\alpha$ bằng quy nạp:
Theo định nghĩa cấp số zig-zag và đồng dư ta có:
Bước 1: $a_1 = a_1 - (\beta - \alpha) = (a_1 - \beta) + 1\alpha$,
Bước 2: Giả sử công thức đúng với n = 2k, tức là $a_k = (a_1 - \beta) + 2k\alpha$.
Ta chứng minh nó cũng đúng với n = 2k + 1. Thật vậy:
$a_{2k+1} = a_{2k} + \alpha = (a_1 - \beta) + 2k\alpha + \alpha = (a_1 - \beta) + (2k + 1)\alpha$.
Nếu công thức đúng với n = 2k + 1 thi cũng đúng với 2k + 2. Thật vậy,
$a_{2k+2} = a_{2k+1} + \beta = (a_1 - \beta) +(2k + 1)\alpha + \beta - (\beta - \alpha) = (a_1 - \beta) + (2k + 2)\alpha$, đpcm.

Cách 2:
Ta sẽ chứng minh $a_n = (a_1 - \alpha) + n\beta$ bằng quy nạp:
Theo định nghĩa cấp số zig-zag và đồng dư ta có:
Bước 1: $a_1 = a_1 + (\beta - \alpha) = (a_1 - \alpha) + 1\beta$,
Bước 2: Giả sử công thức đúng với n = 2k, tức là $ak = (a_1 - \alpha) + 2k\beta$.
Ta chứng minh nó cũng đúng với n = 2k + 1.
Thật vậy:
$a_{2k+1} = a_{2k} + \alpha = (a_1 - \alpha) + 2k\beta + \alpha = (a_1 - \alpha) + 2k\beta + \alpha + (\beta - \alpha) = (a_1 - \alpha) + (2k + 1)\beta$.
Nếu công thức đúng với n = 2k + 1 thi cũng đúng với 2k + 2. Thật vậy,
$a_{2k+2} = a_{2k+1} + \beta = (a_1 - \alpha) + (2k + 1)\beta + \beta = (a_1 - \alpha) + (2k + 2)\beta$, đpcm.

Nếu $\alpha \geq \beta$, trong cũng chúng minh được kết quả như trên!

Như vậy,
Cấp số zig-zag là một cấp số cộng có số hạng tổng quát là
$a_n = (a_1 - \beta) + n\alpha$, $a_n = (a_1 - \alpha) + n\beta$, (mod $|\alpha - \beta|$).

Ví dụ:
Dãy 5, 0, 7, 2, 9, 4, 11 có α = -5 và β = 7 thì là cấp số cộng có số hạng tổng quát là:
$a_n = (5 - 7) + n(-5) = -2 - 5n$ hoặc $a_n = 10 + 7n$. (mod 12).
Dãy 0, 7, 2, 9, 4, 11, 6 có α = 7 và β = -5 thì là cấp số cộng có số hạng tổng quát là:
$a_n = (-7) + 7n$ hoặc $a_n = 5 + 7n$. (mod 12).

Còn nhiều vấn đề phát triển từ đây đói với cấp số zig-zag như tính tổng n số hạng đầu tiên, hay cấp số nhân zig-zag, Thiết lập các bài tập cho học sinh phổ thông có liên quan, . Nhưng thời lượng có hạn, sẽ hẹn bạn đọc vào một dịp khác.

3. Quy luật chuyển đổi liên quan đến các dấu thăng/giáng

Trong nhạc lý, người ta dã tổng kết rằng ở âm giai trưởng chủ yếu là xuất hiện các dấu thăng, và ở âm giai thư thì hầu hết lại có các dấu giáng.

Bài toán đặt ra là
a) Biết số dấu hóa (# hoặc b) thì đó là gam gì?
b) Biết gam trưởng hay thứ thì có bao nhiêu dấu hóa (# hay b)?

Trước tiên, ta vẫn mã hóa dãy 7 nốt cơ bản trong quãng 8 chính như sau:

Tên	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
		Db		Eb			Gb		Ab		Bb	
Mã	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

a. Biết số dấu # thì dấu # cuối rơi vào nốt nào?

Cách 1.
Theo các kết quả có sẵn ta thấy một quy luật hay như sau:
Số dấu # tiến triển theo trình tự F#, C#, G#, D#, A#, E# và B#, tương ứng với các nốt chủ là F, C, G, D, A, E và B có mã lần lượt là: 5, 0, 7, 2, 9, 4 và 11.
Ta sẽ tìm số hạng tổng quát cho dãy số trên.
Gọi số hạng của dãy này là ThăngCuối(SốDấuThăng), là một hàm theo n, n là số dấu #.
Đây chính là một cấp số zig-zag có số hạng đầu là 5 và cặp công sai là (-5;7).

Theo Mệnh đề 1, ta có ngay

$$\textbf{ThăngCuối}(n) = 5 + (n - 1).\frac{-5 + 7}{2} + (1 + (-1)^n).\frac{-5 - 7}{4} = n + 1 - 3(-1)^n, (0 \le n \le 11)$$

Theo Mệnh đề 2, ta cũng có
ThăngCuối(n) = 10 + 7n (mod 12).

b. Biết nốt thăng cuối thì là gam gì ?

Nhận xét :
Tính theo mod 12 thì nếu dấu thăng cuối có mã =k thì đó là của gam có mã la k + 2 :

ThăngCuối(1) = 5 là của gam G-dur,	G = 7	= 5 + 2.
ThăngCuối(2) = 0 là của gam D-dur,	D = 2	= 0 + 2.
ThăngCuối(3) = 7 là của gam A-dur,	A = 9	= 7 + 2.
ThăngCuối(4) = 2 là của gam E-dur,	E = 4	= 2 + 2.
ThăngCuối(5) = 9 là của gam B-dur,	B = 11	= 9 + 2.
ThăngCuối(6) = 4 là của gam F#-dur,	F# = 6	= 4 + 2.
ThăngCuối(7) = 11 của gam C#-dur,	C# = 1	= 11 + 2.

<u>Công thức :</u>
GamTrưởng (n) = ThăngCuối(n) + 2 = 10 + 7n + 2 = 12 + 7n (mod 12) = 7n, (mod 12),
GamThứ(n) = GamTrưởng(n) – 3 = 9 + 7n, (mod 12).

c. Biết mã gam tìm số dấu thăng

Từ công thức **GamTrưởng(n) = 7n (mod 12).**
Biết mã gam trưởng là G ta tìm được số tự nhiên n nhỏ nhất để G chia hết 7, thế là xong !

Ví dụ:
Số dấu # của gam Mi trưởng? Mi = 4 → n = 4, tức không có 4 dấu thăng nào!

Từ công thức **GamThứ(n) = 9 + 7n, (mod 12)..**
Biết mã gam trưởng là G ta tìm được số tự nhiên n nhỏ nhất để G – 9 chia hết 7, thế là xong !

Ví dụ :
Số dấu # của gam La thứ? La = 9 → 9 – 9 = 0 = 7n → n = 0, tức không có 0 dấu thăng nào!

d. Biết số dấu b thì dấu b cuối rơi vào nốt nào?

Theo các kết quả có sẵn ta thấy một quy luật hay như sau:
Số dấu b tiến triển theo trình tự là Bb, Eb, Ab, Db, Gb, Cb và Fb, tương ứng với các nốt chủ là B, E, A, D, G, C và F có mã lần lượt là: 11, 4, 9, 2, 7, 0 và 5.
Ta sẽ tìm số hạng tổng quát cho dãy số trên.

Cách 1:
Gọi số hạng của dãy này là GiángCuối(SốDấuGiáng), là một hàm theo n, n là số dấu b.
Đây chính là một cấp số zig-zag có số hạng đầu là 11 và cặp công sai là (-7;5).

Theo Mệnh đề 1, ta có ngay
GiángCuối(n) $\mathbf{= 11 + (n - 1).\frac{-7 + 5}{2} + (1 + (-1)^n).\frac{-7 - 5}{4} = 9 - n - 3(-1)^n, (0 < n \leq 11).}$
Theo Mệnh đề 2, ta cũng có
GiángCuối(n) = 6 – 7n (mod 12).

Tất nhiên la người ta sẽ chọn công thức nào đơn giản nhất !

e. Biết nốt giáng cuối thì là gam gì ?

Ta có nhận xét độc đáo sau đây, tính theo mod 12 teo số dấu giáng:

GiángCuối(1) = 11 là của gam Dm,	D	= 2
GiángCuối(2) = 4 là của gam Gm,	G	= 7
GiángCuối(3) = 9 là của gam Cm,	C	= 0 = 12
GiángCuối(4) = 2 là của gam Fm,	F	= 5 = 17
GiángCuối(5) = 7 là của gam A#moll,	A#	= 10 = 22
GiángCuối(6) = 0 là của gam D#-moll,	D#	= 3 = 27
GiángCuối(7) = 5 là của gam G#-moll,	G#	= 8 = 32.

Dãy 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32 (mod 12), là một cấp số cộng với số hạng đầu là 2 và công sai là 5.

Công thức :
Gam Thứ(n) = 2 + (n – 1).5 = 5n – 3, mod 12).
GamTrưởng(n) = GamThứ(n) + 3 = 5n, (mod 12),
$(0 \leq n \leq 11)$

Ví dụ:
- Biết bản nhạc có một dấu giáng thì thuộc giọng gì?
n = 1 thì Gam trưởng = 5 túc là Fa trưởng, hay 5 – 3 = 2 là Rê thứ.
- Biết bản nhạc có hait dấu giáng thì thuộc giọng gì?
n = 2 thì Gam trưởng = 5 túc là Xi giáng trưởng, hay 10 – 3 = 7 là Sol thứ.

4. Áp dụng toán học để xây dựng hợp âm.

a. Nguyên lý

Như ta đã biết nếu hai âm có tần số thông ước với nhau thì rất hợp nhau. Ngoài các nốt cách nhau quãng 8 thì hợp nhau, người ta còn tìm ra được những bộ nốt xấp xỉ thông ước với nhau, và nghe thấy hợp nhau, êm tai. Bộ nốt như vậy gọi là các **hợp âm**.

Ví dụ:

Ta lấy tần số của nốt Sol chia cho tần số nốt Đô thì thương là:
G/C = $2^{7/12}$ = 1.4983… ≈ 3/2, tạo thành hợp âm quãng 5 perfect (perfect fifth).
Lấy thương của tần số nốt Mi cho nốt Đô thì có:
E/C = $2^{4/12}$ = 1.2599… ≈ 5/4 (quãng ba trưởng), cũng rất hợp nhau!
Tỉ lệ tần số của các nốt trong hợp âm trưởng (C:E:G) là gần bằng 4:5:6.
Tỷ lệ giữa Fa thăng (F#) và đô (C) không gần với một phân số đơn giản nào, nên không hợp.
Bạn đọc có thể tự tìm ra tỷ lệ đằng sau hợp âm La thứ: La - Đô - Mi.
Tương tự người ta cũng có những hợp âm có 4 nốt: cách nhau các quãng 1, 3, 5 và 7, cũng được và gọi là **hợp âm 7**.
Các hợp âm thường dùng để phối khí cho một bản nhạc trở nên hay hơn!

b. Thang nhạc ngũ âm

Nhạc truyền thống của Việt Nam và một số dân tộc khác là nhạc **ngũ âm (pentatonic**, "cung thương làu bậc ngũ âm"), có thể xây dựng bằng một cấp số nhân khác với công bội là 3/2.
Các nốt trong cung ngũ âm gần với C:D:F:G:A.
Nếu ta chỉnh các nốt cho có 4 quãng năm lý tưởng thì tỷ lệ các tần số phải là:
1, 3/2, 9/8, 27/16, 81/64
Tất nhiên là mỗi khi xuống một octave tần số giảm đi 2 lần và lên một octave thì tần số gấp đôi theo nguyên lý chung.
Các bài ngũ âm cũng có thể đánh được hoàn toàn bằng các phím đen trên đàn piano:
F#, C#, G#, D#, A#.

Tài liệu tham khảo
----
1. Nhạc lý nâng cao - Ngô Ngọc Thắng (NXB Âm nhạc HN 1997.
2. Âm nhạc và các phân số - Đàm Thanh Sơn (Dam Thanh Son's Blog).
3. Toán học và Âm nhac - Trần Đình Viện (ĐHSP Vinh).

Hà Nội, ngày 10/11/2015
lightsmok@gmail.com