MỘT THUẬT TOÁN
KHAI TRIỂN NHANH "TAM THỨC NEWTON"

Phạm Đăng Long
ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

Từ trước tới nay, ta đã quen biết dùng **Tam giác Pascal** cho **Nhị thức Newton**. Bây giờ, ta thử mở rộng thuật toán đó cho trường hợp khai triển biểu thức $(a + b + c)^n$, tạm gọi là **"Tam thức Newton",** trong đó ***a, b*** và ***c*** là những số (thực, phức hoặc các phần tử của một cấu trúc vành tùy ý).

Để thật dễ hiểu, ta xét trường hợp $(a + b + c)^2$. Ta có thể áp dụng công thức khai triển **Nhị thức Newton** hai lần và viết rời ra thành từng hàng riêng biệt như sau:

$$
\begin{aligned}
(a + b + c)^2 = (a + (b + c))^2 = &\quad 1.a^2.(b + c)^0 + \\
&+ 2.a^1.(b + c)^1 + \\
&+ 1.a^0.(b + c)^2 = \\
= &\quad 1.a^2.(1) + \\
&+ 2.a^1.(1.b + 1.c) + \\
&+ 1.a^0.(1.b2 + 2.b.c + 1.c2).
\end{aligned}
$$

Hãy chú ý tới các hệ số bên ngoài các ngoặc, và các hệ số bên trong các ngoặc: Bên trong các ngoặc là khai triển của các Nhị thức Newton $(b + c)^k$, với $k = 0, 1$ và 2. Còn bên ngoài trước các ngoặc là khai triển của $(a + 1)^2$.

Ta xét thêm trường hợp nữa: $(a + b + c)^3$. Cũng làm theo cách trên, ta có:

$$
\begin{aligned}
(a + b + c)^3 = (a + (b + c))^3 = &\quad 1.a^3.(b + c)^0 + \\
&+ 3.a^2.(b + c)^1 + \\
&+ 3.a^1.(b + c)^2 + \\
&+ 1.a^0.(b + c)^3 = \\
= &\quad 1.a^3.(1) + \\
&+ 3.a^2.(1.b + 1.c) + \\
&+ 3.a^1.(1.b^2 + 2.b.c + 1.c^2) + \\
&+ 1.a^0.(1.b^3 + 3.b^2.c + 3.b.c^2 + 1.c^3).
\end{aligned}
$$

Ta cũng chú ý tới các hệ số bên ngoài các ngoặc, và các hệ số bên trong các ngoặc: Bên trong các ngoặc là khai triển của các Nhị thức Newton $(b + c)^k$, với $k = 0, 1, 2$ và 3. Còn bên ngoài trước các ngoặc là khai triển của $(a + 1)^3$.

Đến đây thì đã rõ.

Nếu chỉ nhìn các hệ số thì với trường hợp sau :

Các hệ số bên ngoài ngoặc là dãy số của hàng thứ ba của **Tam giác Pascal** quen biết: *1, 3, 3, 1* hay là các hệ số của khai triển $(a + 1)^3$

Các hệ số trong ngoặc thì theo quy luật sau:

- Dòng 0: là dãy số của **Tam giác Pascal** ở dòng *0*.
- Dòng 1: là dãy số của **Tam giác Pascal** ở dòng *1*.
- Dòng 2: là dãy số của **Tam giác Pascal** ở dòng *2*.
- Dòng 3: là dãy số của **Tam giác Pascal** ở dòng *3*.

Còn các chữ thì:

- Dòng 0: a^3 thừa số với dãy các chữ của khai triển $(b + c)^0$.
- Dòng 1: a^2 thừa số với dãy các chữ của khai triển $(b + c)^1$.
- Dòng 2: a^1 thừa số với dãy các chữ của khai triển $(b + c)^2$.
- Dòng 3: a^0 thừa số với dãy các chữ của khai triển $(b + c)^3$.

Như vậy, muốn khai triển $(a + b + c)^3$ ta có thể tiến hành như sau:

Bước 1:

Chuẩn bị khu vực viết các hệ số gồm một cột bên trái và một bảng bên phải:

Để viết cột các hệ số bên ngoài của khai triển $(a + 1)^3$	Để viết bảng các hệ số bên trong của các khai triển $(b + c)^k$, $k = 0, 1, 2, 3$

Bước 2:

Viết các hệ số bên ngoài *1, 3, 3, 1,* các hệ số của khai triển $(a + 1)^3$ vào cột bên trái và Tam giác Pascal gồm *4* hàng (từ hàng thứ *0* đến hàng thứ *3*) vào bảng bên phải:

1	1
3	1 1
3	1 2 1
1	1 3 3 1

Bước 3:

Thêm dãy các lũy thừa a^3, a^2, a^1, a^0 vào bên cạnh các hệ số của cột bên trái và các chữ của khai triển $(b + c)^k$ vào hàng thứ k của Tam giác Pascal ở bảng bên phải, với $k = 0, 1, 2$ và *3* tương ứng:

$1a^3$	1
$3a^2$	$1b \quad 1c$
$3a^1$	$1b^2 \quad 2bc \quad 1c^2$
$1a^0$	$1b^3 \quad 3b^2c \quad 3bc^2 \quad 1c^3$

Bước 4:

Thu nhận kết quả khai triển của $(a + b + c)^3$, bằng cách lần lượt lấy đơn thức ở đầu mỗi hàng nhân với lần lượt các đơn thức trên cùng một hàng ở bảng bên phải.

$$(a + b + c)^3 =$$

$$= 1.a^3.(1) +$$
$$+ 3.a^2.(1.b) + 3.a^2.(1.c) +$$
$$+ 3.a^1.(1.b^2) + 3.a^1.(2.b.c) + 3.a^1.(1.c^2) +$$
$$+ 1.a^0.(1.b^3) + 1.a^0.(3.b^2.c) + 1.a^0.(3.b.c^2) + 1.a^0.(1.c^3) =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 .$$

Ta gọi quá trình 4 bước này là một thuật toán khai triển nhanh Tam thức Newton vì bỏ qua được nhiều thao tác ước lược các số hạng đồng dạng trước khi đi đến kết quả cuối cùng.

Một cách tổng quát, với ***n*** tự nhiên tuỳ ý, ta có

$$(a+b+c)^n = (a+(b+c))^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}.(b+c)^p =$$
$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}.\left(\sum_{q=0}^{p} C_p^q b^{p-q} c^q\right) =$$
$$= \sum_{0 \le q \le p \le n} C_n^p C_p^q\, a^{n-p} b^{p-q} c^q .$$

Và thực hành như thuật toán sau đây :

Thuật toán:

Khai triển **Tam thức Newton** $(a+b+c)^n$**,** với n là số tự nhiên nào đó.

Bước1:
Chuẩn bị khu vực viết các hệ số gồm một cột bên trái và một bảng bên phải:

Để viết cột các hệ số bên ngoài của khai triển $(a+1)^k$	Để viết bảng các hệ số bên trong của các khai triển $(b+c)^k$, $k = 0, 1, .., n$

Bước 2:
Viết các hệ số bên ngoài $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$ vào cột bên trái và Tam giác Pascal gồm $n+1$ hàng (từ hàng thứ 0 đến hàng thứ n) vào bảng bên phải:

C_n^0 C_n^1 .... C_n^n	C_0^0 $C_1^0 \quad C_1^1$ .... $C_n^0 \quad C_n^1 \ldots\ldots C_n^n$

Bước 3:
Thêm dãy các lũy thừa $a^n, a^{n-1}, \ldots, a^0$ vào bên cạnh các hệ số của cột bên trái và các chữ của khai triển $(b+c)^k$ vào hàng thứ k của Tam giác Pascal ở bảng bên phải, với $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ tương ứng:

$C_n^0 a^n$ $C_n^1 a^{n-1}$ .... $C_n^n a^0$	C_0^0 $C_1^0 b \quad C_1^1 c$ .... $C_n^0 b^n \quad C_n^1 b^{n-1} c \ldots\ldots \quad C_n^{n-1} bc^{n-1} \quad C_n^n c^n$

Bước 4:
Thu nhận kết quả khai triển của $(a+b+c)^n$, bằng cách lần lượt lấy đơn thức ở đầu mỗi hàng nhân với lần lượt các đơn thức trên cùng một hàng ở bảng bên phải.

$(a + b + c)^n =$

$= C_n^0 a^n (C_0^0) +$

$+ C_n^1 a^{n-1} (C_1^0 b) + C_n^1 a^{n-1} (C_1^1 c) +$

$+ \ldots. +$

$+ C_n^n a^0 (C_n^0 b^n) + C_n^n a^0 (C_n^1 b^{n-1} c) + \ldots + C_n^n a^0 (C_n^{n-1} b c^{n-1}) + C_n^n a^0 (C_n^n c^n) =$

$$= \sum_{0 \le q \le p \le n} C_n^p C_p^q \; a^{n-p} b^{p-q} c^q .$$

Một số ví dụ ứng dụng:

<u>Ví dụ 1:</u> Khai triển biểu thức $(a + b + c)^4$.

<u>*Giải:*</u> Thực hiện thuật toán với $n = 4$, vẽ hình sau:

$1a^4$					1				
$4a^3$				$1b$		$1c$			
$6a^2$			$1b^2$		$2bc$		$1c^2$		
$4a^1$		$1b^3$		$3b^2c$		$3bc^2$		$1c^3$	
$1a^0$	$1b^4$		$4b^3c$		$6b^2c^2$		$4bc^3$		$1c^4$.

Ở mỗi hàng, ta nhân các đơn thức ở đầu hàng với các đơn thức phía sau rồi cộng lại ta được $(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 +$
$+ 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4.$

<u>Ví dụ 2:</u> Chứng minh rằng với mọi n tự nhiên ta luôn có:

$$\sum_{0 \le q \le p \le n} C_n^p C_p^q = 3^n .$$

<u>*Giải:*</u> Vế phải = $(1 + 1 + 1)^n = (1 + (1 + 1))^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p}.(1 + 1)^p =$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p}.\left(\sum_{q=0}^{p} C_p^q 1^{p-q} 1^q\right) =$$

$$= \sum_{0 \le q \le p \le n} C_n^p C_p^q 1^{n-p} 1^{p-q} 1^q = \text{Vế trái, đpcm.}$$

<u>Chú ý:</u>

Do vai trò của ***a***, ***b*** và ***c*** như nhau (có tính chất đối xứng, hoán vị vòng quanh), nên ta có thể đổi chỗ đồng loạt mỗi cặp chữ trong số các chữ ***a***, ***b*** và ***c*** trong thuật toán trên, mà kết quả vẫn không đổi !

<u>Đề nghị :</u>

Nên chăng dùng ký hiệu $C(n,p,q)$ thay cho $C_n^p C_p^q$, với ***n, p, q*** tự nhiên và $0 \le q \le p \le n$. Nếu thế thì ta sẽ có công thức khai triển của Tam thức Newton như sau:

$$(a + b + c)^n = \sum_{0 \le q \le p \le n} C(n,p,q) a^{n-p} b^{p-q} c^q .$$

Và xa hơn nữa, nếu dùng kí hiệu $C(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ thay cho $C_{n_1}^{n_2} C_{n_2}^{n_3} \ldots C_{n_{k-1}}^{n_k}$, với $n_1,n_2,\ldots, n_k$ tự nhiên và $0 \le n_k \le n_{k-1} \le \ldots \le n_1$. Thế thì ta cũng có công thức tổng quát sau:

$$(a_1 + a_2 + \ldots a_k)^n = \sum_{0 \le n_k \le n_{k-1} \le \ldots \le n_1} C(n_1,n_2,\ldots,n_k) .a_1^{n_2 - n_1} a_2^{n_3 - n_2} \ldots a_k^{n_{k-1} - n_k} .$$

<u>lightsmok@gmail.com</u>