

# TOÁN HỌC VÀ ÂM NHẠC

(Kính tặng hương hồn anh Hoàng Trọng Thái)

**Trần Đình Viện**

Nhiều nhà toán học yêu âm nhạc và thích nghiên cứu vận dụng toán học vào các quy luật của âm nhạc. Từ giữa thế kỷ trước, tháng 5-1942, gs Nguyễn Thúc Hào đã có bài viết nghiên cứu về CÂY ĐÀN BẦU đăng trong tạp chí BÁO KHOA HỌC số 5-1942. Báo do gs Nguyễn Xiển cùng các nhà khoa học yêu nước như gs Hoàng Xuân Hãn, gs Tạ Quang Bửu, Ngụy Như Kon Tum... sáng lập. Chúng tôi đã có dịp giới thiệu với bạn đọc trong tạp chí Toán Học Tuổi Trẻ số tháng 3-2006.

Thế hệ tiếp theo, nhà giáo ưu tú Hoàng Trọng Thái (1940 – 2008), người nhiều năm giảng dạy Hình học ở khoa toán trường ĐHSP Vinh cũng rất yêu âm nhạc, thích tìm tòi, nghiên cứu vận dụng toán học vào âm nhạc. Nhớ lại những kỷ niệm sống cùng anh trong những năm tháng đầy khó khăn ở các địa phương, nơi trường ĐHSP Vinh sơ tán thời chống Mỹ cứu nước: Nghi Lộc, Thanh Chương, Thanh Hóa. Nhân kỷ niệm năm năm ngày “ra đi” của anh, tôi viết bài này có sử dụng một phần tư liệu từ bài báo có nhan đề “GAM ĐƠN GIẢN” của nhà toán học G.E. Shilov (hình như đăng trong tạp chí Kvant) do anh Tái dịch từ tiếng Nga sang tiếng Việt làm tài liệu tham khảo. Bút tích của anh trên mấy trang giấy thủ công màu nâu đã ủa thời chống Mỹ, đã gọi lại bản tính hiền dịu, nhẹ nhàng của anh, càng thương tiếc anh. Bồi hồi xúc động trước sự “ra đi” quá đột ngột khi đang đang ấp ủ nhiều kỳ vọng đóng góp cho sự nghiệp giáo dục nước nhà. Anh ra đi đã để lại một khoảng trống lớn trong bạn bè, trong các đồng nghiệp của anh đã nhiều năm cùng chung lưng đấu cật, cùng chia buồn sẻ ngọt với nhau ở trường ĐHSP Vinh. Những ai, một thời đã từng là giáo viên hoặc sinh viên trường Vinh, nay ở Hà Nội đều bị hụt hẫng về sự thiếu vắng của một hạt nhân đoàn kết gắn bó với nhau- hạt nhân HOÀNG TRỌNG THÁI.

## 1. Xây dựng thang nhạc

### a, Vài nét về âm thanh

Trước khi nói tới việc xây dựng thang âm nhạc, chúng ta nói đôi nét về âm thanh, theo cách hiểu của vật lý:

Cơ sở toàn bộ âm nhạc là các âm, được xác định bởi độ cao. Về phương diện vật lý, âm thanh là sóng đàn hồi lan truyền trong không khí, (hoặc là quá trình rung trong không khí) với một tần số nào đó. Đơn vị đo tần số là Héc(Hz) là số chu kỳ giao động trong một giây. Tần số càng lớn thì âm càng cao. Tần số bé, âm thấp.

Âm thanh trầm nhất mà tai người có thể nghe được có tần số 16Hz do đại phong cầm phát ra

nhưng rất ít khi dùng vì quá trầm, tai người hầu như không nghe thấy.

Âm có tần số 27Hz (lên octa 3 lần sẽ được nốt Do<sup>1</sup>) rất rõ nhưng cũng ít khi dùng. Đó là nốt nhạc đầu tiên phía trái đàn piano.

Âm 44 Hz (lên octa 3 lần sẽ được nốt Fa<sup>1</sup>) là kỷ lục âm trầm nhất của ca sĩ giọng nam Caxpa Fexe hát ở thế kỷ 18

Âm 80Hz là âm trầm mà một ca sĩ bình thường hát được.

Âm thanh mẫu phổ biến do âm thoa bình thường phát ra nằm trong âm vực này, đó là nốt La<sup>1</sup> (435Hz).

Các âm cao: 1000Hz, 1200Hz vẫn thuộc phạm vi các nốt nhạc quen thuộc. Những nhạc cụ khác vượt quá phạm vi này gồm violon, sáo, đại phong cầm, piano.

*Nữ ca sĩ Lucrexia Aghiari hát nốt nốt Do<sup>4</sup> (2018hec), . Nữ ca sĩ Pháp Mado- Robanh có thể hát thoải mái nốt Re<sup>4</sup>( 2300Hz)*

*Các âm thanh từ 16000 Hz tới 20000Hz là siêu âm , tai người không nghe thấy, người ta dùng vào các việc khác như khoan đá, thăm dò đáy biển hoặc chụp ảnh các bộ phận trong y học....*

### **b. Xây dựng thang nhạc**

Xây dựng thang nhạc không đơn giản như xây dựng thang nhiệt độ, đối với một nhiệt kế thủy ngân . Lấy vạch ứng với độ đóng băng làm  $0^0$  và vạch ứng với nhiệt độ khi nước sôi làm  $100^0$  . Chia khoảng cách giữa hai vạch đó ra 100 phần bằng nhau, đánh dấu từ 0 đến 100 ta được thang nhiệt độ bách phân . Hoặc như cách chia 1m thành 100 phần bằng nhau, mỗi phần có chiều dài 1cm. Thang nhạc khác, nếu ta chia một quãng tám từ một âm có tần số  $f_0$  đến âm có tần số  $2f_0$  thành các quãng nhỏ bằng nhau như kiểu một nhiệt kế thì các âm thanh tạo nên sẽ rất chói tai , người nghe không thể chịu nổi và phải làm cách khác.

Trước hết, thang nhạc phải thỏa mãn hai tiêu chuẩn:

**\*Số âm trong thang không lớn lắm** . Trừ một số ít nhạc cụ như violon, violoncel, người chơi có thể bấm vào bất kỳ chỗ nào trên cần để tạo ra những âm thanh tùy ý, không có khoảng nhảy. Với những nhạc cụ khác, các phím đàn ứng với **một số không lớn** âm cố định . Nếu nhiều quá, sẽ gây khó khăn cho người sử dụng.

**\*.Hòa âm**, các âm phát ra đồng thời trong thang phải hòa quyện với nhau. nghe êm dịu , không có cảm giác chói tai.

Qua thực nghiệm, trước hết ta nhận thấy rằng âm có tần số  $f_0$  ( nói gọn âm  $f_0$  ) và âm  $2f_0$  hòa với nhau tốt nhất. Vì thế, **thang nhạc có âm  $f_0$  thì phải có âm  $2f_0$** , khoảng cách giữa chúng gọi là một Octa( một quãng tám) . Đặc trưng của quãng giữa 2 âm là tỷ số tần số của chúng. Quãng tám có tỷ số là 2.

Ví dụ âm Do<sup>1</sup> có tần số là 262, Do<sup>2</sup>(do<sup>1</sup> lên một octa) có tần số là 523 ,  $523:262 = 2$ .

Âm có tần số bội 3 (3f) , bội 4, bội 5 cũng tham gia vào hòa âm, mặc dầu rất yếu. ta vẫn đưa vào thang.

Như vậy, ngoài chủ âm ( âm đầu tiên của thang nhạc)  $f_0$  , các âm sau đây cũng nằm trong thang :

$$f_1 = \frac{9}{8} f_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} f_0 ; f_2 = 5/4 f_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 f_0 ; f_3 = 4/3 f_0 = 2 f_0 : \frac{3}{2}$$

$$f_4 = \frac{3}{2} f_0 = \frac{1}{2} \cdot 3 f_0 ; f_5 = \frac{5}{3} f_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} f_0 ; f_6 = 15/8 f_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} f_0$$

$$f_7 = 2 f_0$$

**Các âm  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_7$  gọi là âm cơ bản. trong thang nhạc 7 bậc**

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 = 2f_0) \quad (1)$$

Các âm thanh khác sử dụng trong âm nhạc đều do các âm cơ bản trong thang nhạc nâng cao lên hoặc hạ xuống một quãng 8 ( tần số giao động của âm sai khác một bội số của 2 hoặc 1/2) .

\* **Nhận xét:** thang nhạc 7 bậc không đều, nếu cứ để nguyên không bổ sung thêm một số âm nữa thì việc sử dụng sẽ gặp khó khăn, bởi vì khi chuyển giai điệu lên cao hoặc xuống thấp một quãng tùy ý thì giai điệu bị méo, ví dụ giai điệu bài “ ngày đầu tiên đi học “ của Nguyễn Ngọc Thiện *sol sol do sol mi , fa la fa la re ...*. Nếu ta nâng giai điệu lên một ton(giọng): *la la re la fa , sol si sol si mi ...* , sẽ bị méo ở nốt *fa* . Hoặc bài *Em yêu trường em* của Hoàng Vân : *sol sol mi sol , la sol re mi , re mi re mi sol do .....* . Nếu ta nâng giai điệu lên một giọng : *la la fa la , si la mi fa , si la re fa , mi fa mi fa la re* cũng bị méo. Để khắc phục điều đó, khi nâng cao lên hoặc hạ thấp thì giai điệu không bị méo như các ví dụ trên. Ta phải xây dựng thang nhạc đều ( nghĩa là tỷ số các âm liên tiếp liền nhau phải không đổi).

### c. Nói qua vài nét về quá trình dẫn đến một thang nhạc đều 12 bậc :

Người Hy Lạp cổ xưa đã có công chia âm giai thành các quãng tám( quãng tám là khoảng cách giữa các nốt có liên quan gần gũi nhất) và chia mỗi quãng tám thành 12 bậc

Nhà toán học Pytago cũng phát hiện thêm một **quãng năm** và nhận thấy rằng điểm cuối của quãng 5 thứ 12 gần trùng với quãng tám thứ bảy. Điều này cho phép ông và những người kế tục ông tạo nên một thang nhạc dựa trên quãng 8 và quãng 5, gọi là thang nhạc Pytago

Thang nhạc Pytago tồn tại khá lâu, nhưng không đáp ứng được giới âm nhạc. Nhược điểm chính của nó là các quãng 8 và quãng 5 không cùng một đơn vị đo, 12 lần quãng 5 dài hơn 7 lần quãng 8 :  $[(3/2)^{12} - (2)^7]$  gần bằng 1,6 gần bằng 1/9 quãng giữa Re và Do, nên gây khó khăn cho việc lên giây đàn. Các nhạc sĩ và các nhà bác học như Kepler( nhà thiên văn học), Öle( toán học) đã có nhiều cố gắng nghiên cứu cải tiến nhưng không có kết quả. Phải đến năm 1700, nhà toán học kiêm nhạc sỹ người Đức **Angdrê - Vecmâyơ** đã đưa ra một cải tiến đơn giản . Ông không dùng **quãng 5 đúng** mà lấy gần đúng tới mức có thể chấp nhận được. Quãng  $\frac{1}{2}$  cung xuất hiện ( bằng khoảng giữa nốt Mi - Fa ( 349 – 330 =19) “ *một cm âm nhạc* “, nhưng , trong khi cm là một đơn vị đo tùy ý thì quãng  $\frac{1}{2}$  cung lại rất thích hợp với các yêu cầu của âm học và thính giác của con người. Quãng  $\frac{1}{2}$  cung tương đương với 1/12 quãng tám . Thang nhạc 12 bậc đều này gọi là sự điều hòa ngang bằng hoặc gọi là âm giai ôn hòa , ngày nay là cơ sở cho toàn bộ nền âm nhạc châu Âu. Mặc dầu vậy nó chỉ được công nhận sau đề nghị của Bắc và Ramô

### Xây dựng thang nhạc đều 12 bậc

Giả sử trong phạm vi một quãng 8 , những âm của thang là :

$$f_0 < f_1 < f_2 < \dots < f_{m-1} < f_m = 2f_0$$

Dãy những âm đó cũng làm thành một giai điệu đơn giản . Bây giờ ta nâng giai điệu đó lên một bậc :  $f_1 , f_2 , f_3, \dots \dots f_m, f_{m+1} = 2f_1$ . Để giai điệu này không bị méo so với giai điệu xuất phát , cần có điều kiện:

$$f_1 : f_0 = f_2 : f_1 = f_3 : f_2 = \dots = f_m : f_{m-1} = f_{m+1} : f_m$$

Dãy  $\{ f_0, f_1, \dots, f_{m-1}, f_m \}$  là một cấp số nhân, công bội  $q$ ;  $q^m = 2$

Để thuận tiện, ta chuyển dãy  $\{ f_0, f_1, \dots, f_m \}$  (1) thành

$$\{ \log_2 f_0, \dots, \log_2 f_m \} \quad (2)$$

Dãy này là một cấp số cộng có công sai  $d = 1/m$ . Sau khi đặt  $\log_2 f_0 = A$ . Dãy trên sẽ là:

$$A, A+1/m, A+2/m, \dots, A+1 \quad (3)$$

Vấn đề đặt ra bây giờ là chọn số  $m$  như thế nào? Bằng các thí nghiệm trên giây đàn, người ta thấy rằng: ngoài tần số  $f_0$  (âm có tần số giao động  $f_0$ ) ra, các giao động có tần số  $2f_0, 3f_0, 4f_0$  đều tham gia,  $5f_0$  thì nghe rất yếu.

Xét điều kiện *Cùng với âm  $f_0$  trong thang nhạc phải có âm  $3f_0$* . Cũng có nghĩa là cần có âm  $3/2f_0$ , trong khoảng  $(f_0; 2f_0)$ . Ngoài số  $m$  ra, ta phải tìm được số  $k$  ( $k < m$ ) sao cho

$f_k = \frac{3}{2} f_0$ . Đặt  $A = \log_2 f_0$  và Lấy  $\log_2$  cả hai vế :

$\log_2 f_k = \log_2 \left( \frac{3}{2} \right) + A$ . Suy ra phải tìm các số nguyên  $m$  và  $k$  sao cho

$$\log_2 \left( \frac{3}{2} \right) = k/m \quad (4)$$

Điều kiện (4) tương đương  $2^{k/m} = \frac{3}{2}$  hoặc  $2^{k+m} = 3^m$

Điều kiện này không thể thỏa mãn vì vế trái chẵn, vế phải lẻ. Như vậy không thể tìm được hai số nguyên  $k$  và  $m$  thỏa mãn (4). Trong thang  $\log$  không có âm  $\frac{3}{2} f_0$ . Quảng ( $f; \frac{3}{2} f_0$ ) gọi là **quảng 5 hoàn toàn (hoặc quảng 5 đúng)**.

Nhưng cần phải giữ lại tính “**đều**” của thang nhạc để khi chuyển giai điệu không bị méo, còn âm “**hoàn toàn**” có tần số đúng  $3/2f_0$  thì được thay nó bằng một âm có tần số giao động gần nhất chấp nhận được với âm hoàn toàn (đó chính là ý tưởng “**cải tiến**” của *Angdré. Vecmâyơ*) Nghĩa là tìm số hữu tỷ  $k/m$  gần đúng với số vô tỷ  $\log_2(3/2)$  sao cho sai số tần số tương ứng  $< 1\text{Hz}$  để tai ta không nhận thấy được.

Để tìm số hữu tỷ gần đúng với số vô tỷ  $2^{1/12}$ .

Số hữu tỷ  $\frac{7}{12} = 0,583$  gần đúng  $\log_2 \left( \frac{3}{2} \right)$  đạt độ chính xác 0,002 (1Hz ứng với 0.004 trên thang  $\log_2$ ) với sai số mong muốn không quá 0,004. Lấy  $m = 12$ , ta được thang nhạc đều 12 âm, âm thứ 7 rất gần với quảng 5 hoàn toàn ( $\frac{3}{2} f_0$ ). Ta có bảng sau :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\log_2 f_i - \log_2 f_0$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1

Thang nhạc 12 bậc đáp ứng tốt các yêu cầu của chúng ta đề ra. *Logarit tỷ số tần số của hai âm liền nhau  $\log_2(\frac{f_{i+1}}{f_i})$  luôn bằng số không đổi  $\frac{1}{12}$* . Cũng có nghĩa là *tỷ số tần số giao động của hai âm liền nhau trong thang nhạc luôn bằng một số không đổi  $2^{1/12}$  gần đúng với số hữu tỷ 1,055*. Khoảng cách giữa hai âm ấy là  $\frac{1}{2}$  cung, khoảng hai nửa cung gọi là một cung.

**Nhận xét:** Thang nhạc đều 12 bậc này, chứa thang nhạc 7 bậc nói trên (1). Lấy chủ âm Do<sup>1</sup> có tần số 262Hz và quãng 8 Do<sup>2</sup> có tần số 523Hz. Ta có bảng sau:

Âm	Do <sup>1</sup>		Re <sup>1</sup>		Mi <sup>1</sup>	Fa <sup>1</sup>		Sol <sup>1</sup>		La <sup>1</sup>		Si <sup>1</sup>	Do <sup>2</sup>
Tần số f <sub>i</sub>	f <sub>0</sub> = 262	f <sub>1</sub> = 276	f <sub>2</sub> = 294	f <sub>3</sub> = 309	f <sub>4</sub> = 330	f <sub>5</sub> = 349	f <sub>6</sub> = 366,5	f <sub>7</sub> = 392	f <sub>8</sub> = 411,6	f <sub>9</sub> = 440	f <sub>10</sub> = 462	f <sub>11</sub> = 494	f <sub>12</sub> = 523
log <sub>2</sub> f <sub>i</sub>	8,031	8,114	8,198	8,217	8,365	8,448	8,531	8,615	8,691	8,781	8,864	8,948	9,031
log <sub>2</sub> f <sub>i</sub> - log <sub>2</sub> f <sub>0</sub>	0	0,083	0,167	0,250	0,334	0,417	0,500	0,584	0,667	0,750	0,833	0,917	1,000

( i = 0, 1, 2, ..., 11, 12 )

Ngoài 7 âm cơ bản trong quãng 8(Do<sup>1</sup> – Do<sup>2</sup>), ta còn 5 âm phụ trong tập hợp vừa đủ 12 bậc của thang. Chúng được ký hiệu bằng cách thêm vào dấu thăng(#) hoặc dấu giáng(b) bên cạnh các âm cơ bản. Ví dụ f<sub>i</sub> = Do<sup>1#</sup> hoặc f<sub>3</sub> = Mi<sup>1b</sup> ...

Từ thang nhạc 7 bậc không đều, sau khi bổ sung thêm 5 âm phụ ta có thang nhạc 12 bậc đều:

( Do , Do<sup>#</sup> , Re , Re<sup>#</sup> , Mi , Fa , Fa<sup>#</sup> , Son , Son<sup>#</sup> , La , La<sup>#</sup> , Si , Do )'

Hoặc ( Do , Re<sup>b</sup> , Re , Mi<sup>b</sup> , Mi , Fa , Son<sup>b</sup> , Son , La<sup>b</sup> , La , Si<sup>b</sup> , Si , Do )

## 2. Gam trưởng, gam thứ trong âm nhạc

1. **Định nghĩa**, Thang nhạc 7 bậc, trong đó khoảng cách cao độ giữa các âm liên tiếp tính bằng 1 cung hoặc  $\frac{1}{2}$  cung thỏa mãn quy luật dưới đây được gọi là một gam trưởng, âm đầu tiên gọi là chủ âm, ta gọi là **gam f<sub>0</sub> trưởng**:

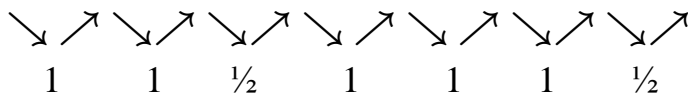
$$\begin{array}{cccccccc}
 (f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4, & f_5, & f_6, & f_7 = 2f_0) \\
 \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
 \end{array} \quad (1)$$

Nếu thỏa mãn điều kiện sau đây thì gọi là **gam thứ**, âm g<sub>0</sub> là chủ âm

$$\begin{array}{cccccccc}
 (g_0, & g_1, & g_2, & g_3, & g_4, & g_5, & g_6, & g_7 = 2g_0) \\
 \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1
 \end{array} \quad (2)$$

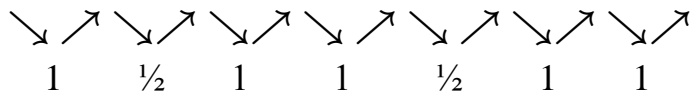
Ví dụ thang nhạc 7 bậc tự nhiên đầu tiên:

(Do<sup>1</sup>, Re<sup>1</sup>, Mi<sup>1</sup>, Fa<sup>1</sup>, Sol<sup>1</sup>, La<sup>1</sup>, Si<sup>1</sup>, Do<sup>2</sup>) là gam Do trưởng ( kí hiệu là C)



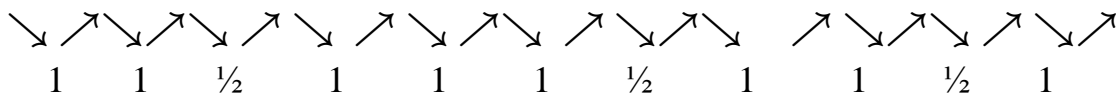
Giữ nguyên thứ tự như vậy nhưng cho La<sup>1</sup> đứng đầu ta có gam La thứ

(La<sup>1</sup>, Si<sup>1</sup>, Do<sup>2</sup>, Re<sup>2</sup>, Mi<sup>2</sup>, Fa<sup>2</sup>, Sol<sup>2</sup>, La<sup>2</sup>)



**2. Dùng dấu thăng(#) để đổi gam** ( thay đổi chủ âm). Do sự cần thiết khi phải lên cao hoặc hạ thấp nhưng vẫn giữ nguyên giai điệu trưởng ( hoặc thứ), ta dùng dấu thăng(#) hoặc giáng(b)

( f<sub>0</sub> . f<sub>1</sub> . f<sub>2</sub> . f<sub>3</sub> . f<sub>4</sub> . f<sub>5</sub> . f<sub>6</sub> . f<sub>7(=2f<sub>0</sub>)</sub> ). 2f<sub>1</sub> . 2f<sub>2</sub> . 2f<sub>3</sub> . 2f<sub>4</sub>



Ví dụ Từ gam Do trưởng: ( Do, Re, Mi, Fa, Son, La, Si , Do ) , Nếu ta thêm dấu # vào âm Fa (Fa<sup>#</sup>) thì ta có gam Son trưởng(G):

( Son, La, Si, Do, Re, Mi, Fa<sup>#</sup>, Son ) (3)

Hệ quả. Từ nhận xét trên, từ gam Xon trưởng( G), áp dụng nhận xét trên , nếu ta đặt thêm dấu # vào âm Do ( vẫn giữ Fa<sup>#</sup>) ta được gam Re trưởng (D) :

( Re, Mi, Fa<sup>#</sup>, Son, La, Si , Do<sup>#</sup>, Re )

Tương tự , từ gam Re trưởng, nếu cho Sol<sup>#</sup> ta có gam La trưởng ( A)...

Dùng dấu giáng (b), ta có nhận xét sau :Từ gam trưởng f<sub>0</sub> nếu ta đặt dấu giáng b vào âm thứ sáu f<sub>5</sub><sup>b</sup> thì được gam trưởng nhận âm thứ tư làm chủ âm (f<sub>3</sub>).

Ví dụ, từ gam Do trưởng, nếu cho Si<sup>b</sup> ta sẽ được gam Fa trưởng( F) . Tiếp tục, từ gam Fa trưởng (Si<sup>b</sup>) nếu cho thêm một dấu giáng vào Mi<sup>b</sup>, ta có gam Si<sup>b</sup> trưởng có hai dấu b là Si<sup>b</sup> và Mi<sup>b</sup> .

Ta không nói về gam thứ vì đã có nhận xét trên : một gam trưởng có chủ âm là âm thứ nhất f<sub>0</sub> hoặc là gam thứ có chủ âm là âm thứ 6 (f<sub>5</sub>) . Từ đó ta có bảng sau đây để xác định gam trưởng, gam thứ theo các dấu thăng (#) hoặc dấu giáng (b):

**Ta có bảng các gam theo dấu thăng (#) :**

Không có dấu thăng

Do trưởng ( C ) hoặc La thứ ( Am)

1 dấu thăng ( Fa<sup>#</sup>)

Son trưởng(G) hoặc Mi thứ (Em)

2 dấu thăng ( Fa <sup>#</sup> , Do <sup>#</sup> )	Re trưởng (D) hoặc Si thứ ( Bm)
3 dấu thăng ( Fa <sup>#</sup> , Do <sup>#</sup> , Son <sup>#</sup> )	La trưởng (A) hoặc Fa <sup>#</sup> thứ (F <sup>#</sup> m)
4 dấu thăng ( Fa <sup>#</sup> ,Do <sup>#</sup> ,Son <sup>#</sup> , Re <sup>#</sup> )	Mi trưởng (E) hoặc Do <sup>#</sup> thứ(C <sup>#</sup> m)
5 dấu thăng ( Fa <sup>#</sup> ,Do <sup>#</sup> ,Son <sup>#</sup> ,Re <sup>#</sup> ,La <sup>#</sup> )	Si trưởng(B) hoặc Son <sup>#</sup> thứ (G <sup>#</sup> m)

### **Các gam theo dấu giáng(b)**

1 dấu giáng (b) : Si <sup>b</sup>	Fa trưởng (F) hoặc Re thứ (Dm)
2 dấu giáng (b) : Si <sup>b</sup> , Mi <sup>b</sup>	S <sup>b</sup> trưởng (B <sup>b</sup> ) hoặc Son thứ(Gm)
3 dấu giáng(b) : Si <sup>b</sup> , Mi <sup>b</sup> , La <sup>b</sup>	Mi <sup>b</sup> trưởng (E <sup>b</sup> ) hoặc Do thứ (Cm)
4 dấu giáng : Si <sup>b</sup> , Mi <sup>b</sup> , La <sup>b</sup> , Re <sup>b</sup>	La <sup>b</sup> trưởng (La <sup>b</sup> ) hoặc Fa thứ(Fm)

**Áp dụng :** Chuyển gam để điều chỉnh nâng cao hoặc hạ thấp cao độ một bản nhạc thích hợp với giọng hát của mình.

Ví dụ 1, một bản nhạc gam Do trưởng(C) , nếu thấy thấp quá có thể nâng lên một ton, ta chuyển lên Re trưởng ( D), bản nhạc phải có hai dấu thăng  $F^\#$  và  $Do^\#$ , mọi âm đều nâng lên một bậc.

Ví dụ 2, một bản nhạc gam Do thứ(Cm) ba dấu giáng  $Si^b$ ,  $Mi^b$ ,  $La^b$ , cao quá muốn hạ thấp xuống 2 ton, ta chuyển sang gam La thứ(Am) bỏ tất cả dấu giáng, cho các nốt nhạc hạ xuống 2 bậc.

### 3. Phím đàn

Hai giây đàn cùng loại có tần số giao động tỷ lệ nghịch với chiều dài của chúng. Nguyên lý này quyết định việc chế tạo các loại phím trên đàn ghita hoặc mandolin. Thang nhạc của chúng ta sử dụng trong một quãng tám có 12 bậc. Khi ta bấm vào phím và gảy vào giây sẽ phát ra các âm thanh cao thấp khác nhau bởi vì độ dài của giây đàn được điều chỉnh khi bấm vào phím đàn. Vấn đề đặt ra là vị trí các phím trên cần đàn như thế nào? Khoảng cách giữa các phím có đều không? Xét một giây bất kỳ của đàn Ghita cũng như Mandolin , giả sử độ dài của giây tính từ phím trên cùng đến con ngựa là  $2a$ , ( khi không dùng tay bấm vào phím nào). Độ dài này ứng với tần số âm  $f_0$  trong thang nhạc đều 12 bậc Ta kí hiệu  $d_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) là độ dài của giây ứng với  $f_i$  trong thang nhạc. Ta biết rằng dãy  $\{ f_0, f_1, \dots, f_m \}$  là một cấp số nhân công bội  $q = 2^{1/12}$  gần bằng 1,056. Theo định luật âm học, tần số giao động của âm thanh tỷ lệ nghịch với độ dài của giây. Vì vậy dãy tương ứng  $\{ a_0, a_1, \dots, a_m \}$  là một cấp số nhân có công bội  $q' = \frac{1}{q} = 2^{-1/12}$ ;  $a_0 = 2a$ .

Ta có  $a_i = a_0 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^i$ . Đặc biệt  $a_{12} = a_0 \cdot (2^{-1/12})^{12} = a_0 \cdot \frac{1}{2} = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$ . Phím nằm ở trung điểm của giây ứng với âm  $f_{12} = 2f_0$  ( $f_0$  lên quãng tám) . Khoảng cách giữa các phím cũng không đều nhau.

Ta gọi  $d_i$  là khoảng cách giữa phím thứ  $i-1$  và  $i$ ,  $d_i = a_0 - a_1, \dots$ ,

$$d_i = a_{i-1} - a_i = a_0 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1} - a_0 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^i = a_0 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{q}\right) = d_0 \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1}.$$

Suy ra dãy  $d_0, d_1, \dots, d_m$ , cũng là một cấp số nhân lùi có công bội  $= 1/q = 2^{-1/12} < 1$

*Hà Nội 15-10-2013*

Tài liệu tham khảo

- 
1. Gam đơn giản GE Shilov ( bản dịch viết tay của Hoàng Trọng Thái)
  2. Vật lý & âm nhạc - Glep Anfilov (NXB KH & Kỹ thuật / HN 1978)
  3. Nhạc lý nâng cao - Ngô Ngọc Thắng (NXB Âm nhạc HN 1997)